SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Fausto Ferrari

SIMMETRIZZAZIONI E DISEQUAZIONI VARIAZIONALI PER OPERATORI ELLITTICI

8 maggio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Abstract. In this note we shall prove a comparison result for solutions of obstacle problems, for elliptical operators in divergence form, via symmetrization techniques.

Sunto. In questa nota proveremo un risultato di confronto per soluzioni di problemi dell'ostacolo, per operatori ellittici in forma di divergenza, utilizzando tecniche di simmetrizzazione.

1 Introduzione

In questa nota forniremo alcune stime relative alla soluzione di un problema dell'ostacolo, associato ad un operatore ellittico, utilizzando tecniche di simmetrizzazione. Ci occuperemo di operatori L in forma di divergenza

(1) $$Lu = -\mathrm{div}(A\nabla u) + cu,$$

su domini limitati $\Omega \subset R^n$ e con coefficienti misurabili e limitati, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ e $c \ge 0$. In particolare supporremo che esistano una funzione misurabile $\nu \ge 0$ e una costante $M > 0$ tali che

(2) $$M\|\xi\|^2 \ge \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \nu(x)\|\xi\|^2, \ \xi \in R^n$$

e

(3) $$\nu \in L^1, \ \nu^{-1} \in L^t, \ \text{per qualche } t > n/2.$$

Con il simbolo $H_0^1(\nu)(\Omega)$ indicheremo il completamento di $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H_0^1(\nu)(\Omega)} = (\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \nu dx)^{1/2},$$

mentre

$$K = \{u \in H_0^1(\nu)(\Omega) : \ u \ge 0\}.$$

Per ogni $u, v \in H_0^1(\nu)(\Omega)$ poniamo

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega cuv.$$

Nelle ulteriori ipotesi

(4) $$f \in L^r, \ \frac{1}{t} + \frac{1}{r} < \frac{2}{n},$$

consideriamo il problema dell'ostacolo

(5) $$\begin{cases} a(u, v-u) \ge \int_\Omega f(v-u), & \text{per ogni } \ v \in K, \\ u \in K, \end{cases}$$

e indichiamo con S l'insieme delle soluzioni dei problemi che si ottengono avendo fissato la misura $|\ \Omega\ |$ dell'insieme Ω e i rispettivi riordinamenti di ν e f.

Proveremo (cfr paragrafo 6) che la soluzione $U_{\nu_*} \in S$ del problema di confronto

(6) $$\begin{cases} a_\sharp(U_{\nu_*}, V - U_{\nu_*}) \ge \int_\Omega f(V - U_{\nu_*}), & \text{per ogni } V \in K, \\ U_{\nu_*} \in K, \end{cases}$$

dove per ogni $U, V \in K$

$$a_\sharp(U,V) = \int_{\Omega^\sharp} \nu_\sharp \nabla U \cdot \nabla V$$

é la forma quadratica associata all'operatore

$$L_\sharp U = -div(\nu_\sharp \nabla U)$$

($\nu_\sharp$ é il riordinamento simmetrico crescente di ν e $\Omega^\sharp$ é la palla centrata nell'origine di misura $\mid \Omega \mid$) soddisfa le seguenti

$$\sup_{u \in S} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|U\|_{L^\infty(\Omega^\sharp)}$$

e

$$\sup_{u \in S} \mid u > 0 \mid = \mid U > 0 \mid .$$

Le principali tecniche che utilizzeremo furono sviluppate da Talenti, per il problema di Dirichlet associato ad operatori uniformemente ellittici tipo (1), e successivamente estese ad operatori piú generali da Chiti [9], Bandle [7], Alvino-Lions-Trombetti [2]. Il caso degenere fu studiato da Alvino e Trombetti [5] proprio per operatori del tipo (1) sempre in relazione al problema di Dirichlet. Per quanto riguarda il problema dell'ostacolo ricordiamo i lavori di Maderna-Salsa [15], Bandle [7], Alvino-Matarasso-Trombetti [4] e Posteraro-Volpicelli [17] per operatori lineari non degeneri e quelli di Rakotoson [18] e Posteraro [16] per il caso non lineare non degenere. Nei paragrafi 2 e 3 daremo, rispettivamente, una interpretazione fisica del problema e alune nozioni inerenti il riordinamento di funzioni, mentre nei successivi paragrafi 4 e 5 verranno riportate le dimostrazioni principali.

2 Interpretazione fisica e formulazione matematica del problema dell'ostacolo

Per comprendere in che modo si perviene alla formulazione del problema dell'ostacolo nella forma del problema (5) consideriamo il funzionale

$$E(v) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \nu \|\nabla v\|^2 + \int_\Omega c v^2\right) - \int_\Omega f v,$$

(ν, $c \geq 0$ e f funzioni opportune) definito sul convesso

$$C = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v \geq \psi, \text{ in } \Omega \text{ e } v = 0 \text{ in } \partial\Omega\}$$

(ψ é una funzione definita su $\overline{\Omega} = \Omega \cap \partial\Omega$ tale che $\max_\Omega \psi \geq 0$ e $\psi \leq 0$ in $\partial\Omega$.
Se esiste u tale che

$$E(u) = \min_{v \in C} E(v)$$

allora per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $v \in C$ si ha $u + t(v-u) \in C$ e posto $g(t) = E(u + t(v-u))$ in 0 esiste un minimo per g; quindi $g'(0)t \geq 0$ per ogni $t \in [0,1]$. In particolare

$$g'(0) = \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla(v-u) + \int_\Omega cu(v-u) - \int_\Omega f(v-u) \geq 0$$

cioé

$$(7) \qquad \begin{cases} \int_\Omega \nu \nabla u \cdot \nabla(v-u) + \int_\Omega cu(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u), & \text{for every } v \in C, \\ u \in C. \end{cases}$$

D'altra parte se

$$a(v,w) = \int_\Omega \nu \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega cvw$$

é una forma bilineare limitata e coerciva definita su uno spazio di Hilbert H ($C \subset H$ é chiuso e convesso) e f appartiene al duale H'. Allora esiste una ed una sola soluzione del problema (7).

L'insieme

$$I = \{x \in \Omega : \ u = \psi\},$$

detto insieme di contatto o di coincidenza, distingue u dalla soluzione di un problema alla frontiera.

Dal punto di vista fisico la soluzione u del problema (7) é la funzione altezza della posizione di equilibrio di una sottile membrana (ν rappresenta la *tensione* della membrana) con altezza 0 alla frontiera, *ostacolata* dal corpo

$$\{(\tilde{x}, \hat{x}) = x : \ x \in \Omega, \ \hat{x} \leq \psi(\tilde{x})\}$$

e soggetta alla forza esterna, parallela all'asse Ou, con funzione di densitá $f(x) - c(x)u(x)$ (f rappresenta lla densitá di forza che agisce sulla membrana, mantre cu é la densitá della *forza di resistenza* del *mezzo* elastico, in cui é immersa la membrana, proporzionale allo spostamento, ma opposta in segno; $c \geq 0$ é quindi il coefficiente di elasticitá del mezzo.

3 Simmetrizzazione di Schwarz

Sia u una funzione misurabile, per ogni $t \in R$,

$$\mu(t) = \mid \{x \in \Omega : \ u(x) > t\} \mid,$$

indica la funzione distribuzione di u.

La funzione u^* cosí definita:

$$u^*(s) = \inf \{t : \ \mu(t) \leq s\}, \quad 0 \leq s \leq \mid \Omega \mid,$$

é detta riordinamento decrescente di u; il riordinamento crescente u_* di u é, definito nello stesso dominio di u^*,come

$$u_*(s) = u^*(\mid \Omega \mid - s),$$

mentre il riordinamento sferico decrescente (di Schwarz) e l'analogo riordinamento sferico crescente (di Schwarz) di u sono rispettivamente definiti, per ogni $x \in \Omega^\sharp$, nel modo seguente

$$u^\sharp(x) = u^*(\alpha_n \|x\|^n), \quad u_\sharp(x) = u_*(\alpha_n \|x\|^n)$$

dove

$$\Omega^\sharp = \{x \in R^n : \ \|x\| < (\alpha_n^{-1} \mid \Omega \mid)^{1/n}\}$$

e α_n indica la misura della palla unitaria. Se f, g sono funzioni misurabili in Ω vale la disuguaglianza di Hardy:

$$\int_0^{|\Omega|} f^* g_* \leq \int_\Omega fg \leq \int_0^{|\Omega|} f^* g^*. \tag{8}$$

Inoltre, se μ é la funzione distribuzione di u, é possibile costruire per ogni $s \in [0, \mid \Omega \mid [$ un sottoinsieme misurabile $D(s) \subset \Omega$ tale che:

1. $\mid D(s) \mid = s$;
2. $s_1 < s_2 \Longrightarrow D(s_1) \subset D(s_2)$;

3. $D(s) = \{x \in \Omega : \ u > t\}$, se $s = \mu(t)$.

Indicheremo poi con $\underline{\nu} \in L^1$ quella funzione assolutamente continua tale che per ogni $s \in [0, \mid \Omega \mid [$

$$\int_{D(s)} \nu^{-1}(x)dx = \int_0^s \underline{\nu}^{-1}(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Vale inoltre il seguente risultato (cfr. [5])

Lemma 3.1 *Sia $\nu^{-1} \in L^t(\Omega)$ e $t > 1$. Esiste una successione di funzioni ν_k tali che $\nu_k^* = \nu^*$ e*

$$\nu_k^{-1} \rightharpoonup \underline{\nu}^{-1} \text{ in } L^t([0, \mid \Omega \mid [).$$

Se $t = 1$, allora

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{|\Omega|} \nu_k^{-1} g = \int_0^{|\Omega|} \underline{\nu}^{-1} g$$

per ogni $g \in BV([0, \mid \Omega \mid [)$.

Osserviamo che $\underline{\nu}$, dipende da ν e in generale anche da u; tuttavia nel caso in cui $\nu(x) \equiv$ *constante* ne consegue che $\underline{\nu} = \nu$.

Come conseguenza del Lemma 3.1 si ha che per $t > 1$ (cfr. [3]) :

$$\|\underline{\nu}^{-1}\|_{L^t([0,|\Omega|])} \leq \|\nu^{-1}\|_{L^t(\Omega)}.$$

4 Tecniche di simmetrizzazione

Poiché i risultati ottenuti in questo paragrafo valgono anche ad operatori in forma completa, considereremo direttamente

$$Lu \equiv -\sum_{i,j}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_i (b_i(x)u)_{x_i} + \sum_i d_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

e

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} - \int_\Omega \sum_j b_j u v_{x_j} + \int_\Omega \sum_i d_i u_{x_i} v + \int_\Omega cuv, \tag{10}$$

supponendo che esista un numero non negativo R tale che:

$$\sum_i \mid b_i + d_i \mid^2 \leq R^2\nu \tag{11}$$

e una funzione c_0 tale che

$$(b_i(x))_{x_i} + c(x) \geq c_0, \text{ on } D'(\Omega). \tag{12}$$

Introduciamo le seguenti notazioni

$$e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) = \exp\left(\frac{R}{n\alpha_n^{1/n}} \int_0^s \frac{z^{-1+1/n}}{\sqrt{\underline{\nu}(z)}} dz\right),$$

$$\beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) = (n\alpha_n^{1/n} s^{1-1/n})^{-2} \underline{\nu}(s)^{-1} e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s)$$

e

$$F_{\sqrt{\underline{\nu}},c_0}(s) = \int_0^s e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1}(f^* - c_{0*}u^*).$$

Analogamente a quanto provato nel caso non degenere, [2] (cfr. also [4]), vale il seguente risultato.

Lemma 4.1 *Se u é soluzione del problema (5) allora, per quasi ogni $s \in [0, \mid u > 0 \mid]$,*

(13) $$-(u^*)'(s) \leq \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s).$$

Dimostrazione (schema). Se u é soluzione di (5) definiamo la seguente funzione test

$$\phi_h^t(x) = \begin{cases} h, & t+h < u(x), \\ u(x) - t, & t < u(x) \leq t+h, \\ 0, & u(x) \leq t, \end{cases}$$

dove $h \geq 0$ e $t \in]0, \sup u[$.

Poiché $u \pm \phi_h^t \in K$, per ogni $h \geq 0$

(14) $$\frac{1}{h} a(u, \phi_h^t) = \frac{1}{h} \int_\Omega f \phi_h^t.$$

Per $h \to 0$ si ottiene, ricordando (2), che per quasi ogni $t \in [0, \sup u[$,

(15) $$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \nu \|\nabla u\|^2$$

$$\leq -\sum_i \int_{u>t} (b_i + d_i) u_{x_i} - \frac{d}{dt} \int_{u>t} u \sum_i b_i u_{x_i} + \int_{u>t} (-cu + \sum_i b_i u_{x_i}) + \int_{u>t} f,$$

Da cui segue, per quasi ogni $t \in [0, \sup u[$,

(16) $$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \nu \|\nabla u\|^2 \leq R(n\alpha_n^{1/n})^{-1} \int_t^\infty \mu^{-1+1/n} \frac{-\mu'}{\sqrt{\underline{\nu}(\mu)}} (-\frac{d}{ds} \int_{u>s} \nu \|\nabla u\|^2) ds$$

$$+ \int_0^{\mu(t)} (f^*(s) - c_{0*}(s) u^*(s)) ds.$$

Verifichiamo ció stimando direttamente i membri di destra della (4)

•

(17) $$\mid \int_{u>t} \sum_i (b_i + d_i) u_{x_i} \mid \leq R \int_t^\infty (-\frac{d}{ds} \int_{u>s} \sqrt{\nu} \|\nabla u\|)$$

$$\leq R \int_t^\infty (-\frac{d}{ds} \int_{u>s} \|\nabla u\|^2 \nu)^{1/2} (-\mu'(s))^{1/2} ds$$

per (11) e poiché

$$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \|\nabla u\| \sqrt{\nu} \leq (-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \|\nabla u\|^2 \nu)^{1/2} (-\mu'(t))^{1/2}.$$

D'altra parte,

$$-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \|\nabla u\| \leq (-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \frac{1}{\nu})^{1/2} (-\frac{d}{dt} \int_{u>t} \|\nabla u\|^2 \nu)^{1/2};$$

quindi dalla disuguaglianza isoperimetrica di De Giorgi

$$P\{u > t\} \geq n\alpha_n^{1/n} \mu(t)^{1-1/n},$$

(P indica il perimetro) dalla formula di Fleming-Rishel

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t}\|\nabla u\| = P\{u>t\}$$

e da (9) otteniamo, per quasi ogni $t \in [0, \sup u[$,

$$n^2\alpha_n^{2/n}\mu(t)^{2-2/n}\frac{\underline{\nu}(\mu(t))}{-\mu(t)'} \le -\frac{d}{dt}\int_{u>t}\|\nabla u\|^2\nu. \tag{18}$$

Pertanto da (17) e (18) segue

$$|\int_{u>t}\sum_i (b_i+d_i)u_{x_i}|$$

$$\le R(n\alpha_n^{1/n})^{-1}\int_t^\infty \frac{-\mu'(t)}{\mu^{1-1/n}\sqrt{\underline{\nu}(\mu)}}(-\frac{d}{dt}\int_{u>s}\|\nabla u\|^2\nu)ds.$$

Per quanto riguarda i rimanenti addendi del membro di destra di (4) (cfr. [2]),

- da (12) segue

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t} u\sum_i b_i u_{x_i} + \int_{u>t}(-cu+\sum_i b_i u_{x_i}) \le -\int_{u>t} c_0 u \le -\int_0^{\mu(t)} c_{0*}u^*,$$

mentre per la disuguaglianza di Hardy

- $$\int_{u>t} f \le \int_0^{\mu(t)} f^*$$

concludendo così la verifica di (16).

Applicando poi il lemma di Gronwall a (16) ed integrando per parti (cfr. [1]) otteniamo

$$-\frac{d}{dt}\int_{u>t}\|\nabla u\|^2\nu \le e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\mu(t))\int_0^{\mu(t)} e^{-1}_{\sqrt{\underline{\nu}}}(f^*-c_{0*}u^*),$$

mentre da (18) segue

$$\frac{1}{\mu'(t)} \le \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\mu(t))F_{\sqrt{\underline{\nu}},c_0}(\mu(t)).$$

Quindi per quasi ogni $s \in [0, |\, u>0\,|]$

$$(-u^*)' \le \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}F_{\sqrt{\underline{\nu}},c_0}.\diamond$$

Osservazione 4.1 *Sia $c_0 \ge 0$. Se u é soluzione di (5) allora per quasi ogni $s \in [0, |\, u>0\,|]$*

$$(-u^*)' \le \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}F_{\sqrt{\underline{\nu}}} \tag{19}$$

5 Il problema simmetrizzato

D'ora in poi supporremo $c_0 \geq 0$.

Esaminando il membro di destra di (19) é possibile verificare che

$$w(x) = v(\alpha_n \|x\|^n) = \int_{\alpha_n \|x\|^n}^{|\Omega|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}} \tag{20}$$

é l'unica soluzione del problema di Dirichlet

$$L^\sharp w - div(\underline{\nu}(\alpha_n \|x\|^n \nabla w) + R\sqrt{\underline{\nu}} \nabla u \cdot \frac{x}{\|x\|} = f^\sharp, \ u \in H_0^1(\underline{\nu})(\Omega^\sharp). \tag{21}$$

Nel caso in cui w sia radialmente decrescente in $B_{\bar\rho} = \{x : \|x\| < \bar\rho\}$, per $\bar\rho > 0$ opportuno, allora é lecito supporre l'esistenza di una costante m tale che:

$$U_{\underline{\nu}}(x) = \begin{cases} w + m, & \|x\| \leq \bar\rho, \\ 0, & \bar\rho \leq \|x\| \leq (\alpha_n^{-1} \mid \Omega \mid)^{1/n}, \end{cases} \tag{22}$$

dove $U_{\underline{\nu}}$ é una soluzione del problema simmetrizzato dell'ostacolo

$$\begin{cases} a^\sharp(U_{\underline{\nu}}, V - U_{\underline{\nu}}) \geq \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp (V - U_{\underline{\nu}}), \quad \text{for every } V \in K^\sharp \\ U_{\underline{\nu}} \in K^\sharp, \end{cases} \tag{23}$$

con

$$a^\sharp(U_{\underline{\nu}}, V - U_{\underline{\nu}}) \equiv \int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu}(\alpha_n \|x\|^n) \nabla U \cdot \nabla (V - U_{\underline{\nu}}) + R \int_{\Omega^\sharp} \nabla U \cdot \frac{x}{\|x\|} (V - U_{\underline{\nu}}),$$

$K^\sharp = \{w \in H_0^1(\underline{\nu})(\Omega^\sharp) : w \geq 0\}$ e $f \in L^r$ per qualche $r \geq 1$ (per semplicitá scriveremo $H_0^1(\underline{\nu})(\Omega^\sharp)$ invece di $H_0^1(\underline{\nu}(\alpha_n \|x\|^n))(\Omega^\sharp)$).

In tal caso $U_{\underline{\nu}}^\sharp = U_{\underline{\nu}}$ e per quasi ogni $s \in [0, \mid \Omega \mid]$,

$$(-U_{\underline{\nu}}^*)' = \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}}$$

inoltre, come corollari, avremmo:

$$\mid u > 0 \mid \leq \mid U_{\underline{\nu}} > 0 \mid$$

e per quasi ogni $s \in [0, \mid \Omega \mid]$

$$u^* \leq U_{\underline{\nu}}^* (= U_{\underline{\nu}}).$$

Prima di dimostrare che esiste una soluzione $U_{\underline{\nu}}$ del problema (23) che si rappresenta come (22), osserviamo che se $w \geq 0$, allora w é anche soluzione di (23).

Teorema 5.1 *Se $f \in L^r$ e $1/t + 1/r < 2/n$, allora esiste una soluzione del problema (23). In particolare:*

se

$$F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\mid \Omega \mid) \geq 0$$

allora w é soluzione del problema (23);

se

$$F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\mid \Omega \mid) < 0 \ e \ f^+ \not\equiv 0,$$

allora

$$U_{\underline{\nu}}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha_n\|x\|^n}^{\bar{s}} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}}, & \|x\| \le (\bar{s}\alpha_n^{-1})^{1/n}, \\ 0, & (\bar{s}\alpha_n^{-1})^{1/n} < \|x\| \le |\,\Omega\,|, \end{cases} \tag{24}$$

é soluzione del problema (23), dove $0 < \bar{s} = (|\,U_{\underline{\nu}} > 0\,|)$ *é l'unica soluzione positiva dell'equazione (in s),* $F_{\sqrt{\underline{\nu}}} = 0$;

se $f^+ \equiv 0$, *allora* 0 *é soluzione del problema (23).*

Dimostrazione: se $F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(|\,\Omega\,|) \ge 0$, allora per ogni $s \in [0, |\,\Omega\,|]$, $F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) \ge 0$ e, necessariamente, $w \ge 0$ per ogni $x \in \Omega^\sharp$. Pertanto $U_{\underline{\nu}} = w$.

Se $f^+ \equiv 0$, allora si verifica direttamente che 0 é soluzione di (23).

Esaminiamo infine il secondo caso, il piú interessante. E' possibile verificare che nelle nostre ipotesi il problema di Dirichlet (21) ha come unica soluzione w (cfr. (20), e [10]). Inoltre esiste $r_1 \in [0, (|\,\Omega\,|\,\alpha_n^{-1})^{1/n}]$ tale che w é radialmente non crescente in $[0, r_1]$ radialmente non decrescente in $[r_1, (|\,\Omega\,|\,\alpha_n^{-1})^{1/n}]$. Pertanto $\alpha_n r_1^n$ é un punto di minimo assoluto per v. Sia

$$-K = \min_{x \in \Omega^\sharp} w(x) = v(\alpha_n r_1^n) < 0.$$

Poniamo

$$v_K(x) = \begin{cases} w(x) + K & \|x\| \le r_1 \\ 0 & \|x\| > r_1, \end{cases} \tag{25}$$

e verifichiamo che v_K é soluzione del problema (23) nel modo seguente. Poiché w é soluzione del problema (21)

$$\int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu}(\alpha_n\|x\|^n)\nabla w \cdot \nabla h + R\int_{\Omega^\sharp} \sqrt{\underline{\nu}}\nabla w \cdot \frac{x}{\|x\|} h = \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp h \tag{26}$$

per $h \in H_0^1(\underline{\nu})$; quindi per ogni $g \in H_0^1(\underline{\nu})$, $g \ge 0$,

$$\int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu}(\alpha_n\|x\|^n)\nabla v_K \cdot \nabla(g - v_K) + R\int_{\Omega^\sharp} \sqrt{\underline{\nu}}\nabla v_K \cdot \frac{x}{\|x\|}(g - v_K) \tag{27}$$

$$= \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp(g - v_K) - \int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \underline{\nu}(\alpha_n\|x\|^n)\nabla w \cdot \nabla(g - v_K) - R\int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \sqrt{\underline{\nu}}\nabla w \cdot \frac{x}{\|x\|}(g - v_K)$$

(dalla definizione di v_K)

$$= \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp(g - v_K) - \int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \underline{\nu}(\alpha_n\|x\|^n)\nabla w \cdot \nabla g - R\int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \sqrt{\underline{\nu}}\nabla w \cdot \frac{x}{\|x\|} g.$$

Proveremo che gli ultimi due addendi sono positivi.

Infatti poniamo, per $\rho_j < r_1$, $\rho_j \to r_1$ e ρ_j non decrescente,

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \ge r_1 \\ (\|x\| - \rho_j)(r_1 - \rho_j)^{-1} & \rho_j \le \|x\| \le r_1 \\ 0 & \|x\| \le \rho_j, \end{cases}$$

$\psi_j \in H^1(\nu)$; sostituiamo una funzione test $h = g\psi_j$ in (26), dove $g \in H_0^1(\underline{\nu})$, $g \geq 0$, ottenendo

$$-\int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu} g \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \nabla \psi_j - \int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu} \psi_j \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \nabla g - R \int_{\Omega^\sharp} \sqrt{\underline{\nu}} \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \frac{x}{|x|} \psi_j g = -\int_{\Omega^\sharp} f^\sharp \psi_j g \geq 0,$$

per ogni j sufficientemente grande, poiché $f^\sharp$ é negativa in $supp\psi_j$.

Dal Teorema di Lebesgue, dopo aver osservato che per $j \to \infty$

$$\int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu} g \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \nabla \psi_j \to 0, \tag{28}$$

otteniamo, per $j \to \infty$,

$$-\int_{\Omega^\sharp} \underline{\nu} \psi_j \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \nabla g - R \int_{\Omega^\sharp} \sqrt{\underline{\nu}} \nabla w \cdot \frac{x}{|x|} \psi_j g \to -\int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \underline{\nu} \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \nabla g - R \int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \sqrt{\underline{\nu}} \nabla w_{\underline{\nu}} \cdot \frac{x}{|x|} g.$$

Quindi da (28) segue

$$-\int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \underline{\nu} \nabla w \cdot \nabla g - R \int_{\Omega^\sharp \setminus B_{r_1}} \sqrt{\underline{\nu}} \nabla w \cdot \frac{x}{|x|} g \geq 0. \tag{29}$$

Dunque per (27) e (29) si ha che v_K é soluzione del problema (23). $\diamond$

Osservazione 5.1 *Se* $F_{\underline{\nu}}(|\,\Omega\,|) < 0$ *e* $f^+ \not\equiv 0$, *allora*

$$K = -\int_{\alpha_n r_1^n}^{|\Omega|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}}$$

e $\alpha_n r_1^n = |\,U_{\underline{\nu}} > 0\,|$, *i.e.* $|\,U_{\underline{\nu}} > 0\,|$ *é l'unica soluzione positiva di*

$$F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) = 0.$$

Come conseguenza la soluzione $U_{\underline{\nu}}$ *del problema (23) puó essere rappresentata nel modo seguente*

$$U_{\underline{\nu}}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\alpha_n \|x\|^n}^{|U_{\underline{\nu}}>0|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}}, & \|x\| \leq (\alpha_n^{-1} \,|\, U_{\underline{\nu}} > 0\,|)^{1/n} \\ 0, & (\alpha_n^{-1} \,|\, U_{\underline{\nu}} > 0\,|)^{1/n} < \|x\| \leq |\,\Omega\,|\,. \end{cases} \tag{30}$$

Ovviamente $U_{\underline{\nu}}$ *é radialmente decrescente.*

Teorema 5.2 *Nelle ipotesi del Teorema 5.1 esiste una sola soluzione radialmente simmetrica e decrescente del problema (23).*

Dimostrazione: per ogni numero positivo r il problema di Dirichlet

$$L^\sharp V_r = f^\sharp \quad V_r \in H_0^1(\underline{\nu})(B_r) \tag{31}$$

ha un' unica soluzione V_r, la quale é anche radialmente simmetrica ([10]).

Osserviamo che se $U_{\underline{\nu}}$ é una soluzione radialmente simmetrica e decrescente di (23) il dominio di non aderenza é una palla.

Indichiamo con ρ_h quel numero positivo che, con abuso di notazione, soddisfa l'equazione $w(\rho_h) + h = 0$, i.e. ρ_hé il raggio della palla per cui $w(x) = -h$ (cfr. 20).

Posto

$$v_h(x) = (w+h)_+(x) = \begin{cases} w(x)+h & \|x\| \le \rho_h \\ 0 & \|x\| > \rho_h, \end{cases}$$

allora v_h soddisfa per $r = \rho_h$ il problema (31) i.e. $V_{\rho_h} \equiv v_h$.

Posto

$$r_2 = \inf\{\|x\| > 0 : U_{\underline{\nu}}(x) = 0\},$$

é chiaro che $U_{\underline{\nu}}$ é soluzione del problema (31) per $r = r_2$.

Ora dall'unicitá della soluzione del problema (31) per $r = r_2$, si ha che $r_2 \le r_1$ e

$$U_{\underline{\nu}} = v_{\bar{h}}, \quad \bar{h} = -w(r_2), \tag{32}$$

in quanto $0 \le h \le K$.

Sappiamo dal Teorema 5.1 che v_K é soluzione del problema (23) quindi se $U_{\underline{\nu}}$ é una soluzione decrescente del problema (23) otterremo $\bar{h} = K$, (cfr.32), provando che $r_2 = r_1$.

Effettivamente ponendo $U_{\underline{\nu}} = v_{\bar{h}}$ e

$$V(x) = \begin{cases} v_K & \|x\| \le r_2 \\ (1 + e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) e^{-1}_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n \|x\|^n)) v_K & r_2 \le \|x\| < r_1 \\ 0 & r_1 \le \|x\|, \end{cases}$$

possiamo constatare che $V \in H_0^1(\Omega^\sharp)$ ed inoltre

$$V(x) - U_{\underline{\nu}}(x) = \begin{cases} K - \bar{h}, & \|x\| \le \rho_{\bar{h}} \\ e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) e^{-1}_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n \|x\|^n) w_K, & r_2 \le \|x\| \le r_1 \\ 0, & \|x\| \ge r_1. \end{cases}$$

Da (23) segue, per calcolo diretto,

$$0 \ge -(K-\bar{h}) R n \alpha_n \int_{B_{r_2}} \sqrt{\underline{\nu}} v'(\alpha_n \|x\|^n) \|x\|^{n-1} dx$$

$$+(K-\bar{h}) \int_{B_{r_2}} f^*(\alpha_n \|x\|^n) dx$$

$$+e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) \int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} f^*(\alpha_n \|x\|^n) e^{-1}_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n \|x\|^n)(v(\alpha_n \|x\|^n) + K) dx,$$

allora

$$0 \ge -nR\alpha_n^{1/n}(K-\bar{h}) \int_0^{\alpha_n r_2^n} \underline{\nu} v'(t) t^{1-1/n} dt + (K-\bar{h}) \int_0^{\alpha_n r_2^n} f^*(t) dt \tag{33}$$

$$+e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) \int_{\alpha_n r_2^n}^{\alpha_n r_1^n} f^*(t) e^{-1}_{\sqrt{\underline{\nu}}}(t)(v(t) + K) dt.$$

Integrando per parti,

$$\int_0^{\alpha_n r_2^n} f^* = e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) \int_0^{\alpha_n r_2^n} f^* e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1} + Rn\alpha_n^{1/n} \int_0^{\alpha_n r_2^n} \sqrt{\underline{\nu}}\bar{w}' s^{1-1/n} \tag{34}$$

e

$$\int_{\alpha_n r_2^n}^{\alpha_n r_1^n} f^* e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1}(\bar{w} + K) = -(K - \bar{h}) \int_0^{\alpha_n r_2^n} f^* e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1} - \int_{\alpha_n r_2^n}^{\alpha_n r_1^n} (\int_0^s f^* e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1}) v'. \tag{35}$$

Sostituendo poi (34) e (35) in (33) otteniamo

$$0 \geq -e_{\sqrt{\underline{\nu}}}(\alpha_n r_2^n) \int_{\alpha_n r_2^n}^{\alpha_n r_1^n} (\int_0^s f^* e_{\sqrt{\underline{\nu}}}^{-1}) v' \geq 0.$$

Quindi $r_2 = r_1$ e $\bar{h} = K$.$\diamond$

Corollario 5.1 *Se u é una soluzione del problema (5) allora*

$$| u > 0 | \leq | U_{\underline{\nu}} > 0 |,$$

dove $U_{\underline{\nu}}$ é la soluzione radialmente simmetrica e decrescente di (23).

Dimostrazione: se $F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(| \Omega |) < 0$, e $f^+ \not\equiv 0$ (cfr. Teorema 5.1 e Osservazione 5.1), allora $F_{\sqrt{\underline{\nu}}} \geq 0$, in $[0, | U_{\underline{\nu}} > 0 | [$, mentre $F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(| U_{\underline{\nu}} > 0 |) = 0$ e per ogni $s \in] | U_{\underline{\nu}} > 0 |, | \Omega |]$

$$F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) < 0.$$

D'altra parte per quasi ogni $s \in [0. | U_{\underline{\nu}} > 0 |]$

$$-(U_{\underline{\nu}}^*)'(s) = \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s) F_{\sqrt{\underline{\nu}}}(s),$$

quindi dal Lemma 4.1 segue

$$| u > 0 | \leq | U_{\underline{\nu}} > 0 | .\diamond \tag{36}$$

Corollario 5.2 *Se u é soluzione di (5) allora per quasi ogni $s \in [0, | \Omega |]$*

$$u^* \leq U_{\underline{\nu}}^*,$$

dove $U_{\underline{\nu}}$ é l'unica soluzione a simmetria radiale decrescente di (23).

Dimostrazione: dal Lemma 4.1 segue

$$u^*(s) \leq \int_s^{|u>0|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}}, \quad \text{for every} \quad s \in [0, | u > 0 |]. \tag{37}$$

Ricordando (36) otteniamo che per quasi ogni $s \in [0, | u > 0 |]$

$$u^*(s) \leq \int_s^{|u>0|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}} \leq \int_s^{|U_{\underline{\nu}}>0|} \beta_{\sqrt{\underline{\nu}}} F_{\sqrt{\underline{\nu}}} = U_{\underline{\nu}}^*(s).\diamond$$

Osservazione 5.2 *Se $0 < m = \inf_\Omega \nu$, il Corollario 5.1 vale ancora sostituendo $\underline{\nu}$ con m. In tal caso, (cfr.[4]),*

$$| u > 0 | \leq | U_m > 0 | .$$

Il numero $| U_m > 0 |$ é la soluzione positiva (in s) di

$$F_m(s) \equiv \int_0^s \exp\left(-\alpha_n^{-1/n}\frac{R}{m}t^{1/n}\right) f^* = 0$$

risulta pertanto interessante stabilire il comportamento di tale soluzione in relazione a R/m.

Posto $\tau = R/m$ e indicato con $\bar{s}(\tau)$ quel valore per cui

$$\int_0^{\bar{s}(\tau)} \exp\left(-\tau\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi = 0,$$

dove ϕ é una funzione positiva decrescente, nel nostro caso

$$\phi(t) = \alpha_n^{-1/n} t^{1/n},$$

vale il seguente risultato.

Lemma 5.1 *La funzione $\bar{s}$ é crescente in $[0, \infty[$.*

Dimostrazione: per ogni $\tau_1 < \tau_2$ e per ogni $s \in [0, \infty[$, integrando per parti, si ha

$$\int_0^s \exp\left(-\tau_1\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi = \exp\left(-(\tau_1 - \tau_2)\phi(s)\right) \int_0^s \exp\left(-\tau_2\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi \tag{38}$$

$$+(\tau_1 - \tau_2) \int_0^s \left(\int_0^t \exp\left(-\tau_2\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi \right) \phi'(t) \exp\left(-(\tau_1 - \tau_2)\phi(t)\right) dt.$$

Ponendo $s = \bar{s}(\tau_2)$ in (38) segue

$$\int_0^{\bar{s}(\tau_2)} \exp\left(-\tau_1\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi$$

$$= (\tau_1 - \tau_2) \int_0^{\bar{s}(\tau_2)} \int_0^t \exp\left(-\tau_2\phi(\xi)\right) f^*(\xi)d\xi\phi'(t) \exp\left(-(\tau_1 - \tau_2)\phi(t)\right) dt,$$

ma il membro di destra é negativo quindi $\bar{s}(\tau_1) < \bar{s}(\tau_2)$.$\diamond$

6 Il caso R=0

In questo paragrafo conclusivo esporremo i risultati principali ottenuti per l'operatore L quando compare solo la parte principale e un termine di ordine zero $c \geq 0$. Posto

$$a_\sharp(u, v) = \int_{\Omega^\sharp} \nu_\sharp \nabla u \cdot \nabla v$$

chiamiamo problema di confronto il seguente

$$\begin{cases} a_\sharp(u, v - u) \geq \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp(v - u) & u \in K_\sharp \\ \text{per ogni } v \in K_\sharp \end{cases} \tag{39}$$

dove $K_\sharp = \{u \in H_0^1(\nu_\sharp)(\Omega^\sharp) : \ u \geq 0\}$. Questo problema dell'ostacolo ha una ed una sola soluzione. In relazione ai risultati ottenuti nel paragrafo precedente osserviamo che se $R = 0$, allora

$$F_{\sqrt{E}}(s) \equiv F(s) = \int_0^s f^*;$$

inoltre se $F(|\ \Omega\ |) < 0$ e $f^+ \not\equiv 0$ da (22) segue che $|\ U_{\underline{\nu}} > 0\ |\ (= \bar{s})$ non dipende da $\underline{\nu}$ poiché F non dipende da $\underline{\nu}$. In particolare dal Teorema 5.1 otteniamo

$$|\ u > 0\ | \leq \bar{s}.$$

Sostituendo $\underline{\nu}$ con un' altra funzione non negativa γ, tale che $\gamma^* = \nu^*$ e ragionando come nella dimostrazione del Teorema 5.1, il problema

$$\int_{\Omega^\sharp} \gamma(\alpha_n \|x\|^n) \nabla U_\gamma \cdot \nabla(V - U_\gamma) \geq \int_{\Omega^\sharp} f^\sharp (V - U_\gamma), \quad U_\gamma \in \hat{K}, \tag{40}$$

per ogni $V \in \hat{K} = \{w \in H_0^1(\gamma(\alpha_n \|x\|^n)(\Omega^\sharp)\ : w \geq 0\}$, ha una sola soluzione U_γ tale che

$$|\ U_\gamma > 0\ | = \bar{s},$$

dove $\bar{s}$é la sola soluzione , quando esiste, dell'equazione (in s)

$$F(s) = 0.$$

Scegliamo $\gamma = \nu_*$ in modo tale che $|\ u > 0\ | \leq |\ U_{\nu_*} > 0\ |$. Se $F(|\ \Omega\ |) \geq 0$, allora $|\ U_{\nu_*} > 0\ | \equiv |\ \Omega\ |$.

Teorema 6.1 *Se u é una qualunque soluzione del problema (5) allora*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|U_{\nu_*}\|_{L^\infty(\Omega^\sharp)}$$

Dal teorema Crollario 5.2 segue

$$\sup_\Omega u = u^*(0) \leq U_{\underline{\nu}}(0),$$

poi applicando il Lemma 3.1 otteniamo

$$U_{\underline{\nu}}(0) = \lim_{k \to \infty} (n\alpha_n^{1/n})^{-2} \int_0^{\bar{s}} \frac{s^{-2+2/n} F}{\nu_k} \tag{41}$$

mentre dalla disuguaglianza di Hardy segue

$$U_{\underline{\nu}}(0) \leq \int_0^{|\Omega|} \frac{(s^{-2+2/n} F I_{[0,\bar{s}]})^*}{\nu_*} = \int_0^{\bar{s}} \frac{s^{-2+2/n} F}{\nu_*} = U_{\nu_*}(0),$$

poiché, quando $n > 1$, la funzione

$$\psi(t) = s^{-2+2/n} F I_{[0,\bar{s}]}$$

é non decrescente in $[0, \bar{s}]$.$\diamond$

Riferimenti bibliografici

[1] **A. Alvino, P.L. Lions, S. Matarasso,G. Trombetti**: *Comparison Results for solution to Elliptic Problems via Symmetrization* apparirá in Ann. Ist. Henry Poincaré.

[2] **A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti**: *Comparison results for elliptic and parabolic equations via Schwarz symmetrization,* Ann. Ist. Henry Poincaré, Vol.7, $n^0 2$, 1990, 37 – 67.

[3] **A. Alvino, P.L. Lions, G. Trombetti**: *On optimization problems with prescribed rearrangements,* Nonlin. An. T.M.A., 13, 185 – 220 (1989).

[4] **A. Alvino, S. Matarasso, G. Trombetti**: *Variational inequalities and rearrangements,* in Rend. Mat. Acc. Lincei s.9, v3 : 271 – 285 (1992).

[5] **A. Alvino, G. Trombetti**: *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri.* Ric. di Mat.,27, 1978, 413 – 428.

[6] **A. Alvino, G. Trombetti**: *Sulle migliori costanti di maggiorazione per una classe di equazioni ellittiche degeneri e non.* Ric. di Mat.,30, 1981, 15 – 33.

[7] **C. Bandle**: *Isoperimetric inequalities and applications.* Monographs and Studies in Math., Pitman, London 1980.

[8] **C. Bandle, J.Mossino**: *Rearrangement in variational inequalities.* Ann. Mat. Pura e Appl., 138, 1984, 1 – 14.

[9] **G. Chiti**: *Norme di Orlicz delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche.* Boll. U.M.I. 16–A, 1978, 179 – 185.

[10] **F. Ferrari**: *Rearrangements and an obstacle problem for degenerate variational inequalities,* preprint.

[11] **D. Kinderlehrer, G. Stampacchia**: *An introduction to variational inequalities and their applications* Academic Press (1980).

[12] **C. Maderna, S.Salsa**: *Some special properties of solutions to obstacle problems.* Rend. Sem. Mat. Un. Padova, 71, 1984, 121 – 129.

[13] **J. Mossino**: Inégalités isopérimetriques et applications en physique. Hermann, Paris 1984.

[14] **V.P. Mikhailov**: *Partial differential equations* MIR Publishers Moscow (1978).

[15] **M.K.V. Murthy, G. Stampacchia**: *Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators,* Ann. Pura Appl.,90 (1971), 1 – 122.

[16] **M. R. Posteraro**: *Estimates for solutions of nonlinear variational inequalities,* Ann. Inst. Henry Poincarè vol. 12 n5., (1995) 557 – 597.

[17] **M. R. Posteraro, R. Volpicelli**: *Comparison results for a class of variational inequalities,* Rev. Mat. de la Univ. Compl. de Madrid, 6 n. 2 (1993).

[18] **J. M. Rakotoson**: *Réarrangement relatif dans l' équations elliptiques quasilinéaires avec un second membre distibution: Application a un théorème d'existence et de régularité,* J. Differential Equations 66 (1987), 391 – 416.

[19] **G. Talenti**: *Elliptic equations and rearrangements,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 3, 1976, 697 – 718.

[20] **G. Talenti**: *Linear elliptic P.D.E.'s level sets, rearrangements and a priori estimates of solutions,* Boll. UMI, 4-B, 1985, 917 – 949.